www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

EPREUVE DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES ET ALGORITHMIQUE

DUREE: 3 Heures

Avertissement : Cette épreuve consiste en l'étude d'une méthode numérique de traitement d'images discrètes. Après la description d'un **Exemple** simple, on effectue l'étude mathématique, illustrée par l'**Exemple**. En fin de sujet, on demande l'écriture d'un **algorithme** que l'on exprimera dans le sous-ensemble du langage **Pascal** figurant au programme.
Les calculatrices programmables alpha-numériques sont autorisées sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86.228 du 28/07/86

A. Introduction

On va traiter numériquement des "images discrètes", comme par exemple les deux suivantes:

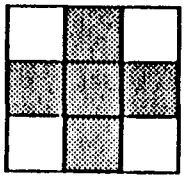

image (1)

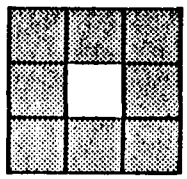

image (2)

Dans cet **Exemple**, une image discrète est n'importe quel damier (3 , 3) à cases blanches ou noires; il y a donc ici $2^9 = 512$ images discrètes différentes.

On va représenter mathématiquement ces images discrètes par des vecteurs-colonnes, dont les composantes sont : (+1) pour représenter une case noire, et (-1) pour représenter une case blanche. Dans l'exemple ci-dessus, on numérotera les cases du damier (3 , 3) de la façon suivante :

1	2	3
4	5	6
7	8	9

de sorte qu'aux images discrètes (1) et (2) seront associés respectivement les vecteurs-colonnes suivants:

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ pour (1)} \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \end{pmatrix} \text{ pour (2)}$$

B. Définitions et préliminaires

Dans tout le problème, n et k sont deux entiers donnés supérieurs à 1.

L'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ est muni de sa base canonique et de son produit scalaire canonique, noté $< / >_n$. On note $\mathbf{M}_{n,k}$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels constituées de n lignes et k colonnes. On identifie une matrice A de $\mathbf{M}_{n,k}$ et l'endomorphisme de $\mathbf{R}^k$ dans $\mathbf{R}^n$ dont la matrice est A. De même, on identifie un élément u de $\mathbf{R}^n$ à la matrice-colonne de ses coordonnées. Pour détailler, on notera a_{ij} les coefficients de A (i = 1, 2, ... , n ; j = 1, 2, ... , k) et u_j les coordonnées de u (j = 1, 2, ... , n).

On notera E_n le sous-ensemble $\{-1 , +1\}^n$ de $\mathbf{R}^n$ constitué des 2^n vecteurs dont les coordonnées appartiennent à {-1 , +1}.

Tournez la page S.V.P.

Dans toute la suite du problème, on se donne k vecteurs (distincts) de E_n , notés $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots , x^{(k)}$ ($k \leq n$) qu'on appellera les **images discrètes** données.

Exemple $n = 9$, $k = 2$, $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ définis comme ci-dessus.
Nota Dans toute la suite, l' **Exemple** désignera celui qu'on vient d'examiner.

Dans le cas général, on notera X la matrice de $\mathbf{M_{n,k}}$ dont les k colonnes sont les vecteurs $x^{(i)}$ (i = 1, 2, ..., k) :

$$X = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ x^{(1)} & \ldots & x^{(k)} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

On note ${}^tX$ la matrice de $\mathbf{M_{k,n}}$ transposée de la matrice X , et l'on définit les deux matrices:

$$L = X\,{}^tX \qquad (L \in \mathbf{M_{n,n}})$$
$$N = {}^tX\,X \qquad (N \in \mathbf{M_{k,k}})$$

On définit la fonction échelon, notée ech , de **R** dans {-1 , +1} de la façon suivante:

$$ech(x) = +1 \text{ si } x > 0$$
$$ech(x) = -1 \text{ si } x \leq 0$$

On définit alors l'application, notée Ech , de $\mathbf{R^n}$ dans E_n de la façon suivante:

$$x \in \mathbf{R^n} \mapsto Ech(x) \in E_n \text{ avec: } \quad \big(Ech(x)\big)_i = ech(x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots , n)$$

Enfin, pour une matrice W de $\mathbf{M_{n,n}}$, on définit l'application F_W de E_n dans lui-même, de la façon suivante:

$$x \in E_n \mapsto F_W(x) = Ech(Wx)$$

Après quelques préliminaires utiles établis à la ***Question1*** *, on étudie, dans la partie C. , la **stabilité** des images discrètes données pour l'application particulière F_L. Dans la partie D. , on étudie un problème relatif à la **reconstitution** par F_L des **images discrètes données** à partir d'**images discrètes perturbées**.*

Question1.

a) Expliciter, dans l'**Exemple**, les matrices X, L, N.
Remarque: *Le calcul de L est grandement facilité par le fait que toutes les lignes de cette matrice sont égales ou opposées à l'une des deux premières (ce qui facilitera aussi le calcul ultérieur de L x)*

b) Vérifier que, dans le cas général: $n_{ij} = \langle x^{(i)} / x^{(j)} \rangle_n$ (i, j = 1, 2, ... , k)

et que: $n_{ii} = n$ (i = 1, 2, ... , k)

c) Montrer que, dans le cas général, et pour i = 1, 2, ... , k :

$$F_L(x^{(i)}) = Ech\left(\sum_{j=1,\ j\neq i}^{k} n_{ij}\, x^{(j)} \quad + n\, x^{(i)} \right)$$

Tournez la page S.V.P.

C. Stabilité des images discrètes données

Un vecteur x de E_n est dit **point fixe** de F_W si $F_W(x) = x$

On désire trouver une matrice W de $M_{n,n}$ telle que: (*C*) $F_W(x^{(i)}) = x^{(i)}$ $(i = 1, 2, ..., k)$

autrement dit, telle que les images discrètes $x^{(i)}$ soient points fixes de F_W.

Question 2.

a) Dans le cas particulier où les vecteurs $x^{(i)}$ sont deux à deux orthogonaux dans $\mathbf{R}^n$:

$$<x^{(i)} / x^{(j)}>_n = 0 \quad i, j = 1, 2, ..., k \; ; \; i \neq j$$

montrer que le choix W = L permet de satisfaire à la condition (*C*).

b) Dans l'**Exemple**, les vecteurs $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ sont-ils deux à deux orthogonaux ? Vérifier que $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ sont néanmoins points fixes de F_L.

c) Trouver alors **tous** les points fixes de l'opérateur F_L de l'**Exemple**. Dessiner les images discrètes correspondantes.

Question 3. Cas général

La matrice N est dite **à diagonale dominante** si : $|n_{i\,i}| > \sum_{j=1,\ j \neq i}^{k} |n_{i\,j}| \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$

a) Prouver que si N est à diagonale dominante, alors tous les $x^{(i)}$ sont points fixes de F_L $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

b) Illustrer ce résultat dans l'**Exemple.**

c) Montrer que le résultat de la question **2. a)** est cas particulier de celui de la question **3. a)**.

D. Attractivité des images discrètes données

Dans l'**Exemple**, on va "perturber" les images discrètes (1) et (2) pour obtenir :

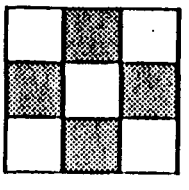

image (1')

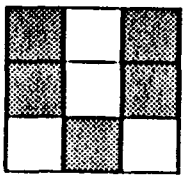

image (2')

Question 4.

a) Expliciter les vecteurs $x'^{(1)}$ et $x'^{(2)}$ associés respectivement aux images discrètes (1') et (2') et calculer $F_L(x'^{(1)})$ et $F_L(x'^{(2)})$.

Dans cet **Exemple**, on dira que l'on a **reconstitué** l'image (1) à partir de son image perturbée (1') (et de même que l'on a reconstitué l'image (2) à partir de son image perturbée (2')) en appliquant l'opérateur F_L à $x'^{(1)}$ (respectivement $x'^{(2)}$).

Tournez la page S.V.P.

Dans le cas général, on va se donner des vecteurs $x'^{(1)}, x'^{(2)}, \ldots, x'^{(k)}$ de E_n, qui dans la pratique sont des **perturbations** des images discrètes $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$ données. On suppose qu'un récepteur d'images reçoive ces images discrètes perturbées à partir des images discrètes $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$ émises. On souhaite **reconstituer** les images discrètes données $x^{(i)}$ en appliquant l'opérateur F_L aux $x'^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. On va donc chercher une condition suffisante assurant que la condition *(D)* suivante est satisfaite :

$$(D) \quad F_L(x'^{(i)}) = x^{(i)} \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

On introduit les vecteurs $\varepsilon^{(i)} = x'^{(i)} - x^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ (On remarquera que les composantes de $\varepsilon^{(i)}$ sont nécessairement dans $\{-2, 0, +2\}$).

On définit les matrices de $M_{n,k}$ suivantes :

$$X' = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ x'^{(1)} & \ldots & x'^{(k)} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{E} = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ \varepsilon^{(1)} & \ldots & \varepsilon^{(k)} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

et l'on pose: $P = {}^tX\,X'$ $(P \in M_{k,k})$

b) Montrer que si P est à diagonale positive ($p_{ii} > 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$) et dominante, alors *(D)* est satisfaite.

c) Illustrer ce résultat par l'**Exemple**.

d) Retrouver le résultat de la question **3. a)** à partir de celui de la question **4. b)**.

e) Dans l' **Exemple**, montrer que, pour tout x de E_n, $F_L(x)$ est point fixe de F_L. Quelle conclusion peut-on en tirer, lorsqu'on applique l'opérateur F_L à l'une quelconque des 512 images discrètes possibles?

E. Ecriture d'un algorithme

Question 5.

Ecrire un algorithme effectuant le calcul de $F_W(x)$, lorsque la matrice W et le vecteur x sont donnés.

Remarque : *On pourra se borner à l'écriture du corps du programme sans préciser nécessairement les déclarations de type.*

****

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail